Deel I
Reële functies

1. Rationale functies

§ 1. Definitie: gezien

§ 2. Homografische functies: zie onder

§ 3. Domein, nulpunten en tekenonderzoek: gezien

1. De functie $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Domein f

2. Snijpunten met de X-as en de Y-as

   - de nulpunten van de functie zijn de snijpunten met de .....-as.

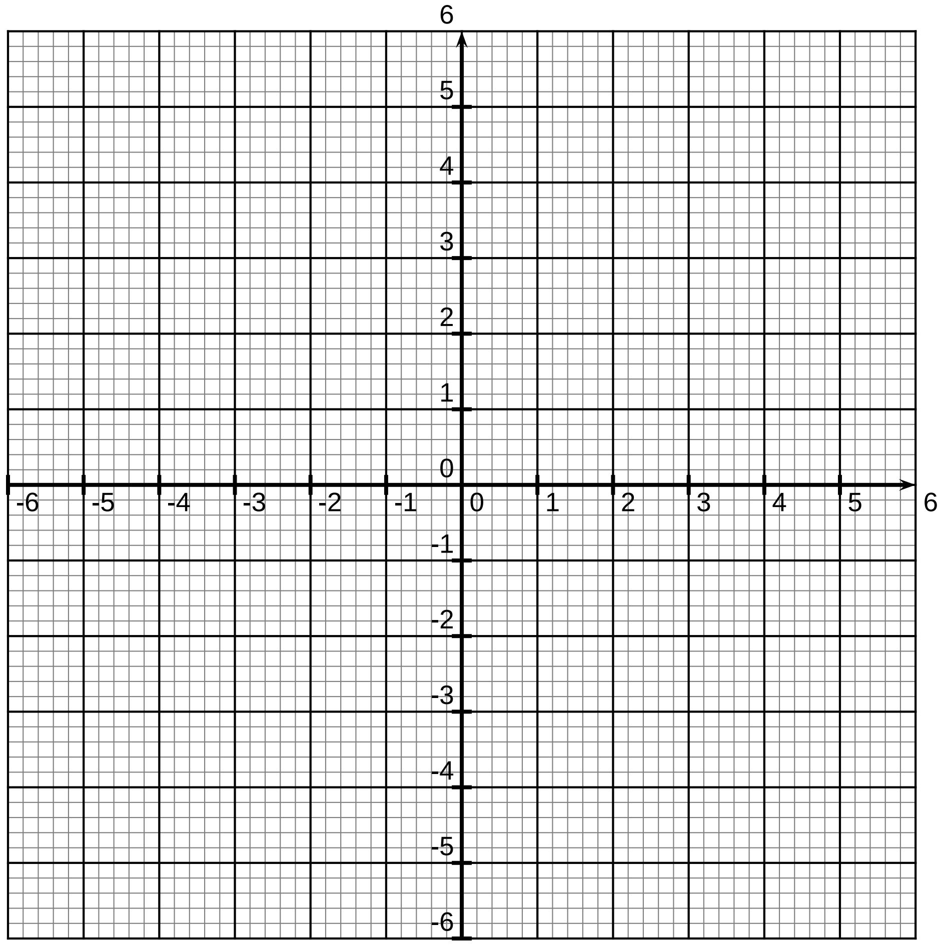
   - snijpunten met de .....-as

3. Tekenonderzoek

4. Eventuele symmetrie

   Duid deze eventuele symmetrie straks aan in punt 5 en 6.

5. Gebiedsindeling



6. Enkele bijkomende punten

x	-5	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5
$f(x) = 1/x$										

7. Enkele punten die we verder gaan bespreken:

- De functie is dalend/stijgend in $]-\infty, 0[$ en $]0, +\infty[$. Leg uit.

  Het waardeverloop is dus

x	0
$f(x) = 1/x$	

- We onderzoeken functiewaarden in de linker- en rechteromgeving van 0.

  linkeromgeving:

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$f(x) = 1/x$				

  rechteromgeving:

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$f(x) = 1/x$				

  Dus als $x \mapsto$ ... en x...0, dan $f(x) \mapsto$ ....
  en als $x \mapsto$ ... en x...0, dan $f(x) \mapsto$ ....
  We noemen 0 een POOL van deze functie.
  Dus als x naar 0 gaat, dan gaat de grafiek steeds dichter naar de .... toe, zonder deze te snijden.
  Zo'n verticale rechte noemen we een ....
  We noteren ...... $\leftrightarrow$ ......
  We vullen het waardeverloop aan.

- Vervolgens onderzoeken we de functiewaarden voor zeer grote waarden van x (in positieve en negatieve zin).

  negatieve zin:

x	-10	-100	-1000	-10000
$f(x) = 1/x$				

  positieve zin:

x	10	100	1000	10000
$f(x) = 1/x$				

  Dus als $x \mapsto$ ......, dan $f(x) \mapsto$ ....
  en als $x \mapsto$ ......, dan $f(x) \mapsto$ ....
  Dus als x naar $-\infty$ gaat en als x naar $+\infty$ gaat , dan gaat de grafiek steeds dichter naar de .... toe, zonder deze te snijden. Zo'n horizontale rechte noemen we een ....
  We noteren ...... $\leftrightarrow$ .....
  Vul het waardeverloop aan met deze gegevens.

- De grafiek van $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ noemen we een ....
  Omdat de asymptoten .... op elkaar staan, spreekt men van een ....

2. Grafieken, afleidbaar uit de grafiek van $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Start de computer op en open onder de map “wiskunde” het programma “graphmat”. We willen weten hoe de grafiek verandert als we het voorschrift een beetje aanpassen.
We geven de functie $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ in onder de vorm $y = \frac{1}{x}$ (gevolgd door ENTER). Vanuit deze bijhorende grafiek gaan we nu verder werken.

1. De functie $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-1}$

   Geef deze functie in (haakjes!). Vergelijk de grafiek van f_1 met de grafiek van f.

   Besluit:..

   Breng dit in verband met het domein. Laat de computer ook de verticale asymptoot tekenen.
   ....

   - Beschouw de functie $g_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Voorspel eerst hoe de grafiek met zijn asymptoten er uit gaat zien. Controleer vervolgens met de computer. (gebruik ook “zoom in” en “zoom out”, de vergrootglas-iconen)
   - Geef een functie in van de vorm $x \mapsto \frac{1}{x+a} \quad (a \in \mathbb{R})$, wis het voorschrift en laat je gebuur het voorschrift terugvinden uitgaande van de getekende grafiek.

   Wis (grafiek selecteren en klikken op “Delete graph”, kruis-icoon) alle getekende grafieken en asymptoten, behalve de grafiek van de functie $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-1}$.

2. De functie $f_2 : x \mapsto \frac{2}{x-1}$

   Geef deze functie in. Vergelijk de grafiek van f_2 met de grafiek van f_1.

   Besluit:...

   Hoe kan je dit verklaren?
   ....
   Is er iets gebeurd met de ligging van de asymptoten? Zo ja, wat?
   ....

   - Beschouw de functie $g_2 : x \mapsto \frac{3}{x-1}$. Voorspel eerst hoe de grafiek met zijn asymptoten gaat liggen. Controleer vervolgens met de computer.

   - Geef een functie van de vorm $x \mapsto \frac{a}{x-1} (a \in \mathbb{R}^+)$, wis het voorschrift en laat je gebuur het voorschrift terugvinden uitgaande van de getekende grafiek.

   Wis alle getekende grafieken en asymptoten, behalve de grafiek van de functie $f_2 : x \mapsto \frac{2}{x-1}$.

3. De functie $f_3 : x \mapsto -\frac{2}{x-1}$

   Geef deze functie in. Vergelijk de grafiek van f_3 met de grafiek van f_2.

   Besluit:...

   Hoe kan je dit verklaren?
   ....
   Is er iets gebeurd met de ligging van de asymptoten? Zo ja, wat?
   ....

   Wis alle getekende grafieken en asymptoten, behalve de grafiek van de functie $f_3 : x \mapsto -\frac{2}{x-1}$.

4. De functie $f_4 : x \mapsto 3 - \frac{2}{x-1}$

   Geef deze functie in. Vergelijk de grafiek van f_4 met de grafiek van f_3.

   Besluit:...

   Hoe kan je dit verklaren?
   ....
   Is er iets gebeurd met de ligging van de asymptoten? Zo ja, wat?
   ....

   - Beschouw de functie $g_4 : x \mapsto -4 - \frac{2}{x+1}$. Voorspel eerst hoe de grafiek met zijn asymptoten gaat liggen. Controleer vervolgens met de computer.

   - Geef een functie van de vorm $x \mapsto a - \frac{2}{x+1} (a \in \mathbb{R})$, wis het voorschrift en laat je gebuur het voorschrift terugvinden uitgaande van de getekende grafiek.

   Wis nu het scherm volledig (clear screen).

5. De functie $f_5 : x \mapsto \frac{-5x-13}{x+2}$ (nog niet laten tekenen!!)

   Om de functie in eenzelfde vorm als de functies hierboven te krijgen, voeren we eerst de Euclidische deling uit:

   Schrijf het functievoorschrift nu met behulp van quotiënt, deler en rest.

   Laat de computer nu terug de grafiek tekenen van de functie $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Voorspel nu zelf eens, stap per stap, hoe de grafiek van de functie f_5 er uitziet.
   Maak vervolgens een overzicht zoals in het besluit in je handboek blz. 16.

3. Grafieken van homografische functies

Alle functies van de vorm $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ hebben dus grafieken die kunnen afgeleid worden van de grafiek van de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ door de volgende transformaties:

- ....

- ....

- ....

- ....

Deze grafieken zijn daardoor allemaal van dezelfde vorm. (Orthogonale hyperbolen met asymptoten evenwijdig met X-as en Y-as, en dus onderling loodrecht.)
We noemen deze functies daarom HOMOGRAFISCHE functies. Bestudeer het voorbeeld in je boek op blz. 17 en 18. Maak oef. 8(2), 9(2,4), 10(5), 12(1,2) en 13 blz. 29-31.