Deel I

Matrices en Stelsels

1. Matrices

§ 1. Begrippen

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. Weten wat men met de volgende begrippen bedoelt en deze begrippen ook zelf kunnen gebruiken: matrix, rijen, kolommen, dimensie van een matrix, diagonaalelementen, symmetrische matrix, directe-wegen-matrix.
  2. Elk element van de matrix kunnen indexeren, d.w.z. kunnen beschrijven met rij- en kolomnummer en omgekeerd m.b.v. rij- en kolomnummer elementen kunnen bepalen.
  3. Weten wanneer matrices gelijk zijn.

- Waar vind je de theorie? boek blz. 3 t.e.m. 6.

- Welke oefeningen moet je minimaal maken? oef. 1; 2(3,4,6); 3(1,2a,2c,3a); 4; 5; 8 en 10 boek blz. 26 t.e.m. 29.

TAAK 1.1

1.

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

2.

§ 2. Bewerkingen met matrices

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. Weten wat men met de volgende begrippen bedoelt en deze begrippen ook zelf kunnen gebruiken: nulmatrix, tegengestelde matrix, eenheidsmatrix, diagonaalmatrix en scalaire matrix.
  2. Weten wanneer 2 matices optelbaar zijn en deze ook kunnen optellen.
     Een matrix met een getal kunnen vermenigvuldigen.
     Weten wanneer 2 matrices vermenigvuldigbaar zijn en deze ook kunnen vermenigvuldigen.
     Een diagonaalmatrix tot een **macht** kunnen verheffen en goed weten dat deze eigenschap **alleen** maar geldt voor **diagonaalmatrices**!!!!!!!!!!!!!!!
  3. Weten aan welke eigenschappen de bovenstaande bewerkingen onderworpen zijn en deze eigenschappen kunnen toepassen.

- Waar vind je de theorie? in het "zelfstandig-werk-pakket"

- Welke oefeningen moet je minimaal maken? oef. 11(2); 12(5); 13(3); 17(3); 19(3); 20(2,4); 21(2); 22(4); 23; 25; 26(5) en 27 boek blz. 29 t.e.m. 34.
  Ook de oefeningen uit het "zelfstandig-werk-pakket".

A. Optellen van matrices

De verantwoordelijke voor de handboeken van ons college bestelde op 13.7.99 de volgende aantallen boeken:

- voor het eerste jaar:
  16 godsdienstboeken, 14 boeken Nederlands en 12 wiskundeboeken
- voor het tweede jaar:
  14 godsdienstboeken, 12 boeken Nederlands en 18 wiskundeboeken
- voor het derde jaar:
  24 godsdienstboeken, 30 boeken Nederlands en 32 wiskundeboeken
- voor het vierde jaar:
  4 godsdienstboeken, 8 boeken Nederlands en 14 wiskundeboeken

Op 18.8.99 werd volgende bijbestelling gevraagd:

- voor het eerste jaar:
  16 godsdienstboeken, 34 boeken Nederlands en 24 wiskundeboeken
- voor het tweede jaar:
  4 boeken Nederlands en 10 wiskundeboeken
- voor het derde jaar:
  8 godsdienstboeken, 6 boeken Nederlands en een teruggave van 14 wiskundeboeken
- voor het vierde jaar:
  4 godsdienstboeken

We noteren nu beide bestellingen in een matrix:

- eerste bestelling:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{god} & \text{Ned} & \text{wis} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{eerste jaar} \\ \text{tweede jaar} \\ \text{derde jaar} \\ \text{vierde jaar} \end{array} \end{array}$$

- tweede bestelling:

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{god} & \text{Ned} & \text{wis} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{eerste jaar} \\ \text{tweede jaar} \\ \text{derde jaar} \\ \text{vierde jaar} \end{array} \end{array}$$

Hoeveel boeken werden er in het totaal besteld en moeten per 1 september 1999 geleverd zijn? Vul aan:

$$C = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{god} & \text{Ned} & \text{wis} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{eerste jaar} \\ \text{tweede jaar} \\ \text{derde jaar} \\ \text{vierde jaar} \end{array} \end{array}$$

We noemen de matrix C de som van beide matrices A en B.

Let op: de matrix A telt $\ldots$ rijen en $\ldots$ kolommen en de matrix B telt $\ldots$ rijen en $\ldots$ kolommen. Het zijn dus beide matrices uit $\mathbb{R}^{\cdots\times\cdots}$. Wat is de dimensie van de som-matrix C? ....
We gaan nu algemeen werken met matrices uit $\mathbb{R}^{m\times n}$.

1. Wanneer zijn twee matrices $[a_{ij}]^{m\times n}$ en $[b_{ij}]^{k\times l}$ optelbaar?
   ....
   Wat is de dimensie van de som-matrix? ....

2. Hoe tellen we twee optelbare matrices op?
   $[a_{ij}]^{m\times n} + [b_{ij}]^{\cdots\cdots} = [c_{ij} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]^{\cdots\cdots}$

De gebruikelijke eigenschappen zoals commutativiteit en associativiteit blijven hier gelden, dus:
$A+B=$.................
$(A+B)+C=$.................

We willen nu bij een matrix A een matrix optellen waarvan de elementen allemaal nullen zijn:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Zo'n matrix waarvan de elementen allemaal nul zijn, wordt een **nulmatrix** genoemd en voorgesteld door een grote 0.

Welke matrix zullen we bij de gegeven matrix moeten optellen om de nulmatrix uit te komen? Hoe zullen we deze te zoeken matrix noemen?................

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus stellen we

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

dan is

$$-A = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt het verschil van matrices: $B-C=$ ....

B. Vermenigvuldigen van een matrix met een getal

De verantwoordelijke voor de handboeken van ons college bestelde op 13.7.99 de volgende aantallen boeken:

- voor het vijfde jaar:
  4 godsdienstboeken, 6 boeken Nederlands en 9 wiskundeboeken
- voor het zesde jaar:
  2 godsdienstboeken en 4 wiskundeboeken

In matrixnotatie geeft dit:

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Op 18.8.99 werd het dubbel aantal handboeken besteld als op 13.7.99. In matrixnotatie geeft dit:

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

De volgende eigenschappen zijn evident: $(r, s \in \mathbb{R}$ en $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n})$

- $r(A+B) = rA + rB$
- $(r+s)A = rA + sA$
- $(r \cdot s)A = r(sA)$

Bestudeer de twee toepassingen in je handboek blz. 10 en 11 en maak vervolgens de opgegeven oefeningen 11-19 blz. 29-32.

C. Vermenigvuldigen van matrices

De familie GOEDKOOP wil gaan winkelen. Zij verlangen de volgende aankopen: 10 kg aardappelen, 1 brood, 2 kg rundsvlees en 1 bak limonade.
Pa GOEDKOOP gaat naar drie warenhuizen in de regio en noteert de prijzen in een prijzenmatrix P: (de prijzen zijn in fr/kg, fr/stuk of fr/bak)

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \text{aar} & \text{bro} & \text{run} & \text{lim} \\ \text{kg} & \text{st} & \text{kg} & \text{bak} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{IDLA} \\ \text{BG} \\ \text{IDE} \end{array} \end{array}$$

Pa GOEDKOOP vuurt nu de volgende vragen af op zijn kroost:

Als je in de BG gaat winkelen, hoeveel betaal je dan voor:

$$\begin{aligned} \text{10 kg aardappelen} &= 5 \cdot 10 = \ldots \\ \text{1 brood} &= \ldots \cdot 1 = \ldots \\ \text{2 kg rundsvlees} &= \ldots \cdot 2 = \ldots \\ \text{1 bak limonade} &= \ldots \cdot 1 = \ldots \end{aligned}$$

We schrijven nu de totaal te betalen som in de BG:

$5 \cdot 10 + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots =$ ...... totaal te betalen.

In de IDLA is dit:

$\ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots =$ ...... totaal te betalen.

In de IDE is dit:

$\ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots =$ ...... totaal te betalen.

Welk warenhuis is het goedkoopste? ....

Pa GOEDKOOP vindt dat dit wiskundiger kan en moet. Hij schrijft de aankopen in een kolommatrix A en de totaal te betalen sommen in een kolommatrix S:

$$A = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kg aardappelen} \\ \text{brood} \\ \text{kg rundsvlees} \\ \text{bak limonade} \end{array} \qquad S = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{IDLA} \\ \text{BG} \\ \text{IDE} \end{array}$$

Pa GOEDKOOP neemt een stukje papier en schrijft: $P \cdot A = S$
Je moet rijen en kolommen vermenigvuldigen, mompelt hij. Zijn zonen en dochters begrijpen er hoe langer hoe minder van. En jullie?
Vul aan en probeer de redenering te begrijpen:

$$\begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots \\ \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots \\ \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Wat stellen de getallen in de laatste kolommatrix S voor? ....
Hoe vind je bijvoorbeeld 1265?
Dit is het element op de ... rij van S en de ... kolom van S. Dit element bekomen we dus door de elementen van de ... rij van de matrix ... te .... met de elementen van de ... kolom van de matrix ... en vervolgens deze producten ....
We noemen de matrix ... het product van beide matrices ... en ....
Let op: de matrix P telt ... rijen en ... kolommen en de matrix A telt ... rijen en ... kolom. Merk op dat het aantal rijen van de product-matrix ... gelijk is aan het aantal .... van de matrix .... Bovendien is het aantal kolommen van de product-matrix ... gelijk is aan het aantal .... van de matrix .... Wat is de dimensie van de product-matrix S? ....

We gaan nu algemeen werken met matrices uit $\mathbb{R}^{m\times n}$.

1. Wanneer zijn twee matrices $[a_{ij}]^{m\times n}$ en $[b_{ij}]^{k\times p}$ vermenigvuldigbaar?
   ....
   Wat is de dimensie van de product-matrix $[c_{ij}] = [a_{ij}] \cdot [b_{ij}]$: ....

2. Hoe vermenigvuldigen we deze twee vermenigvuldigbare matrices?
   Schrijf het element c_{21} eens voluit:

   $c_{21} =$

   Bij het opstellen van matrices, die je later moet optellen en/of vermenigvuldigen, moet je dus ook goed opletten dat je de volgorde respecteert. Je vermenigvuldigt niet zomaar rijen met kolommen, zij moeten ook met elkaar overeenkomen:
   In je uitdrukking voor s_{21} (dit geeft aan hoeveel ....)
   geeft p_{23} aan... en geeft a_{31} aan
   ....

   Nu in het algemeen:
   $[a_{ij}]^{m\times n} \cdot [b_{ij}]^{\cdots\cdots} = [c_{ij} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]^{\cdots\cdots}$

We oefenen nu eerst dit vermenigvuldigen in aan de hand van de opgegeven oefeningen 20-22.

We gaan nu even stilstaan bij de eigenschappen van de vermenigvuldiging van matrices.

1. Is de vermenigvuldiging van matrices commutatief: $\ldots \cdot \ldots \quad = \quad \ldots \cdot \ldots ?$

   - Als

     $$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

     dan is

     $$A \cdot B =$$

     en

     $$B \cdot A =$$

   - Als $A \cdot B$ en $B \cdot A$ bestaan, geldt dan wel dat $A \cdot B = B \cdot A$?
     Als

     $$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

     dan is

     $$A \cdot B =$$

     en

     $$B \cdot A =$$

   Dus in het algemeen: ....

2. Is de vermenigvuldiging van matrices distributief t.o.v. de optelling?
   Bekijk terug oefening 21(2) blz. 32. Conclusie:

3. Of de vermenigvuldiging van matrices ook associatief is, gaan we na aan de hand van de volgende context.

   Een distributieketen ORKAM biedt haar klanten-winkeliers een reeks pakketten groenten en vlees aan. Zij heeft ook twee soorten klanten: bevoorrechten, d.w.z. regelmatige afnemers en contante betalers, en gewone klanten die af en toe afnemer zijn of niet contant betalen. Bevoorrechte klanten krijgen steeds een interessante prijs.

- Voor de maand september biedt ORKAM volgende pakketten aan:
  - pakket 1:
    100 kg groenten en 10 kg vlees.
  - pakket 2
    90 kg groenten en 20 kg vlees.
  - pakket 3
    80 kg groenten en 30 kg vlees.

  Vul nu de aanbiedingsmatrix A aan:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{p 1} & \text{p 2} & \text{p 3} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{groenten} \\ \text{vlees} \end{array}$$

- Twee winkeliers W1 en W2 reageren op dit aanbod en bestellen:
  - winkelier 1:
    60 maal pakket 1, 70 maal pakket 2 en 50 maal pakket 3.
  - winkelier 2:
    80 maal pakket 1, 90 maal pakket 2 en 100 maal pakket 3.

  We stoppen dit in een bestellingsmatrix B:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{w 1} & \text{w 2} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{p 1} \\ \text{p 2} \\ \text{p 3} \end{array}$$

- De gemiddelde kostprijs per kilogram van de groenten en het vlees is als volgt vastgelegd:
  - voor groenten:
    10 fr/kg voor bevoorrechte klanten en 12 fr/kg voor gewone klanten.
  - voor vlees:
    200 fr/kg voor bevoorrechte klanten en 250 fr/kg voor gewone klanten.

  Vul nu de prijs-matrix C aan:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{gro} & \text{vle} \end{array} \\ C = & \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{bevoorrechten} \\ \text{gewonen} \end{array}$$

DEEL A

- ORKAM wil weten hoeveel kg groenten en vlees elke winkelier bestelde.
  Welke matrixvermenigvuldiging moeten zij nu uitvoeren: ....
  Schrijf vervolgens deze matrix-vermenigvuldiging uit. (Schrijf telkens de betekenis van de elementen boven de rijen en naast de kolommen, zodat we goed weten waar we mee bezig zijn, ook in de product-matrix!)

  $\ldots \cdot \ldots =$

- Wat stelt dan $C \cdot (A \cdot B)$ voor? ....
  ....
  Schrijf dit uit. (Schrijf telkens de betekenis van de elementen boven de rijen en naast de kolommen, zodat we goed weten waar we mee bezig zijn, ook in de uitkomst!)

  $C \cdot (A \cdot B) =$

- Wij hebben dus eerst berekend ....
  Vervolgens hebben dit tussenresultaat aan de linkerkant/rechterkant vermenigvuldigd met ....
  Dit gaf als eindresultaat: ....

DEEL B
Door de berekeningen in een andere volgorde uit te voeren, kunnen we ook komen tot de totale kostprijs. Geef een alternatieve volgorde van berekeningen.

- Eerst berekenen we ....
  Wiskundig schrijven we deze matrix-vermenigvuldiging als volgt:

  $\ldots \cdot \ldots =$

- Dan vermenigvuldigen we dit tussenresultaat aan de linkerkant/rechterkant met ....
  Dit geeft als eindresultaat:... Schrijf dit uit. (Schrijf telkens de betekenis boven de rijen en naast de kolommen)

  .... =

Deze context bewijst dus dat: ....

Tenslotte verwerk je in je handboek blz.18 tot 20: eenheidsmatrix, machten, diagonaalmatrix en scalaire matrix. Werk je oefeningen af.

§ 3. Toepassingen op het matrixproduct

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. Oefeningen kunnen maken i.v.m. migratie- of bevolkingsmatrix, directe-wegen-matrix en Leslie-matrix.
  2. Weten wat een getransponeerde matrix is en de bijbehorende rekenregels voor het transponeren kunnen toepassen.
  3. Matrices kunnen opstellen en de matrix-bewerkingen kunnen toepassen in contexten.
     Hierbij moet je al je tussenresultaten en eindresultaten goed kunnen interpreteren.

- Waar vind je de voorbeelden en theorie? boek blz. 22 t.e.m. 25.

- Welke oefeningen moet je minimaal maken?

  – oef. 33(3); 34(1); 35; 37; 38; 40 en 41 boek blz. 35 t.e.m. 41.
  – Natuurlijk ook de bijgesloten opgaven in deze bundel.

A. Migratie- of bevolkingsmatrix

zie handboek

B. Directe-wegen-matrix

zie handboek

C. Getransponeerde matrix

zie handboek

D. Leslie-matrix en andere extra opgaven

zie handboek oefeningen boek blz. 38-41 en opgaven op de volgende copies.

OPGAVE 1

Joris moet inkopen doen voor een klasfeestje. Hij koopt onder andere drie soorten chips: zout, paprika en bolognèse. Van elk van deze soorten koopt hij enkele zakken van het bekende merk "Krocy" en ook enkele zakken van de "gele producten". De prijzenmatrix P en de aantallen matrix A staan hieronder:

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} \text{zout} & \text{pap} & \text{bol} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 32 & 35 \\ 17 & 20 & 23 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Kro} \\ \text{gele} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{l} \begin{array}{cc} \text{Kro} & \text{gele} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{zou} \\ \text{pap} \\ \text{bol} \end{array}$$

Gevraagd:

1. Bereken van $P \cdot A$ de elementen van de hoofddiagonaal.
   Wat is de betekenis van deze elementen?
2. Bereken ook van $A \cdot P$ de elementen van de hoofddiagonaal.
   Wat is de betekenis van deze elementen?
3. Waarom hebben de overige elementen van $P \cdot A$ en van $A \cdot P$ geen betekenis?
4. De som van de elementen op de hoofddiagonaal van $P \cdot A$ en van $A \cdot P$ zijn gelijk.
   Geef een verklaring.

OPGAVE 2

Van de twee klassen 6 LaMo en 6 EcMo zijn de resultaten van een test wiskunde gegeven in de matrix R:

$$R = \begin{array}{l} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{6LaMo} \\ \text{6EcMo} \end{array}$$

Gevraagd:

1. Stel een matrix A op zodat $R \cdot A$ aangeeft hoeveel zevens per klas gescoord zijn.
2. Stel een matrix B op zodat $R \cdot B$ aangeeft hoeveel voldoendes per klas gescoord zijn.

3. Stel een matrix C op zodat $R \cdot C$ aangeeft hoeveel leerlingen elke klas heeft.

4. Stel een matrix D op zodat $R \cdot D$ aangeeft hoeveel punten totaal per klas gescoord zijn.

5. Stel een matrix E op zodat $E \cdot R$ aangeeft hoeveel vieren, hoeveel vijven, hoeveel zessen, ... de twee klassen samen gescoord hebben.

OPGAVE 3

Pugo Van Hraag heeft drie filialen. In een week is bijgehouden hoeveel wasautomaten van de merken Miesens, Schob, Kaubnecht en Lieme verkocht zijn. Zie de verkoopmatrix V.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{M} & \text{S} & \text{K} & \text{L} \end{array} \\ V = & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 2 \\ 8 & 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fil1} \\ \text{fil2} \\ \text{fil3} \end{array} \end{array}$$

De inkoopprijs van een wasautomaat van merk Miesens is 8000 fr, van merk Schob 5500 fr, van merk Kaubnecht 12000 fr en van merk Lieme 18000 fr. De verkoopprijs van een wasautomaat is respectievelijk 10000 fr, 8000 fr, 16000 fr en 24000 fr.
Gevraagd:

1. Verwerk de gegevens over de inkoop- en verkoopprijzen in een prijzenmatrix P zodat $V \cdot P$ betekenis heeft.

2. Bereken $V \cdot P = T$. Geef een interpretatie aan het element t_{12}.

3. Bedenk een matrix Q zodat $Q \cdot T$ informatie geeft over het totale bedrag dat de drie filialen samen voor de inkoop hebben betaald en over het totale verkoopsbedrag van de drie filialen samen.

4. Bereken de totale winst die de drie filialen deze week samen gemaakt hebben op de wasautomaten.

OPGAVE 4

Een bungalowpark heeft drie typen huisjes: A, B en C. De verhuurprijs van de huisjes is afhankelijk van het seizoen. Men onderscheidt:

- Laagseizoen (LS)
- Middenseizoen (MS)
- Hoogseizoen (HS)

Matrix P geeft de weekprijzen (in Bef) weer. De matrix N geeft de aantallen van elk type huisje in het park weer.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12960 & 8820 & 10440 \\ 15120 & 10620 & 12780 \\ 19440 & 14040 & 17100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{LS} \\ \text{MS} \\ \text{HS} \end{array}$$

$$N = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array}$$

Gevraagd:

1. Bereken $P \cdot N$. Wat is de betekenis van de elementen van $P \cdot N$?
2. In één week van het jaar worden géén huisjes verhuurd omwille van groot onderhoud. De overige 51 weken worden gelijk verdeeld over de seizoenen LS, MS en HS.
   In de praktijk blijkt dat in het laagseizoen elke week 50 % van de huisjes (ongeacht het type) verhuurd zijn , in het middenseizoen 80 % en in het hoogseizoen 90 %.
   Stel een 1×3-matrix F op, die informatie geeft over de verhuurpercentages én die zodanig is, dat het matrixproduct $F \cdot P \cdot N$ een reële betekenis heeft voor de leiding van het bungalowpark. Wat is deze betekenis?
3. De leiding van het park wil nu een bewerking(en) uitvoeren met de gegeven matrices zodat het resultaat de inkomsten op jaarbasis geeft. Welke bewerking(en) is (zijn) dit?

2. Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen

§ 1. Definities

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. Weten wat men met de volgende begrippen bedoelt en deze begrippen ook zelf kunnen gebruiken: (uitgebreide) coëfficiëntenmatrix, homogeen stelsel, vierkant stelsel, oplossingsverzameling.
  2. Weten dat een homogeen stelsel altijd minstens één oplossing heeft, nl. de nuloplossing en dat behalve deze nuloplossing het homogeen stelsel ook nog een andere oplossing **kan** hebben.

- Waar vind je de theorie? boek blz. 46 t.e.m. 51.

- Welke oefeningen moet je minimaal maken? oef. 1a(3,4,9,10) en 1b helemaal boek blz. 77.

§ 2. Oplossen van willekeurige stelsels

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. Weten welke de gelijkwaardigheidsbeginselen van stelsels eerstegraadsvergelijkingen zijn. (het bewijs op blz. 54 hoef je **niet** te kennen). Aansluitend ook weten welke elementaire rijoperaties toegelaten zijn op een matrix, hiervoor ook de correcte notaties kunnen hanteren en natuurlijk die operaties kunnen uitvoeren.
  2. Weten wat de volgende begrippen inhouden: equivalente matrices, rij-canonieke matrices, rang van een matrix.
  3. Een matrix kunnen herleiden tot zijn rij-canonieke vorm, dit volgens een methode naar keuze: m.b.v. elementaire rij-operaties of m.b.v. de spilmethode. Hierbij zeker onthouden dat een spil **nooit** nul mag zijn!!! Denk er ook aan dat nul-rijen onmiddellijk onderaan worden geplaatst.
  4. Stelsels kunnen oplossen met de methode van Gauss-Jordan, hecht zeker voldoende belang aan de moeilijkste soort: de onbepaalde stelsels: stelsels waarbij het aantal hoofdonbekenden kleiner is dan het aantal onbekenden. De algemene oplossingsverzameling ook hier in het algemeen kunnen opschrijven en een aantal specifieke oplossingen kunnen geven.
  5. Het verband weten tussen de rang van een stelsel en het aantal oplossingen van dat stelsel.

- Waar vind je de theorie? boek blz. 52 t.e.m. 69.

- Welke oefeningen moet je minimaal maken? oef. 2(1,3,5), 3(1,4,5,7,9), 4(1,3,6,9,10), 5(1,2,3,4,6,7,10,11), 7(1,3) blz. 77-81

§ 3. Inverse matrix

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. De definitie van een inverse matrix goed kunnen hanteren (houd hierbij goed in de gaten dat de vermenigvuldiging van matrices normalerwijze **niet** commutativiteit is!!)
  2. De begrippen inverteerbare = reguliere = niet-singuliere matrix en niet-inverteerbare = niet-regulier = singuliere matrix begrijpen.
  3. Weten dat een matrix niet altijd inverteerbaar is.
     Bovendien weten, dat als een matrix wel inverteerbaar is, de inverse matrix dan énig is.
  4. De inverse van een matrix kunnen bereken en dit ook kunnen toepassen bij coderings- en decoderingsopdrachten.

- Waar vind je de theorie? in het "zelfstandig-werk-pakket"

- Welke oefeningen moet je minimaal maken? de bijgesloten oefeningen. (extra oefeningen kan je vinden in je boek blz. 82)

A. Probleemstelling

Laat ons eerst even terug gaan naar de verzameling $\mathbb{R}$:

$$5 \cdot x = 1 = x \cdot 5$$

We zoeken hierbij het onbekende getal x, zodat 5 vermenigvuldigd met dit onbekende getal x het eenheidselement 1 geeft. Omwille van de commutativiteit in $\mathbb{R}$ geldt bovendien dat x vermenigvuldigd met 5 ook terug 1 geeft.
Waaraan is dit onbekende getal x gelijk? ....
We noemen dit getal ook de inverse van 5 voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$.
Had elk getal in $\mathbb{R}$ zo'n inverse voor de vermenigvuldiging? (welk niet?).................
Dus voor de vermenigvuldiging geldt in het algemeen: $\forall a \in \ldots : a^{-1} = \ldots$

Nu gaan we hetzelfde bestuderen in de verzameling $\mathbb{R}^{n\times n}$. Naar analogie met het eenheidselement 1 voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$, hebben we in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ook een eenheidselement voor de vermenigvuldiging, namelijk: .....

Kan je nu een matrix aangeven die de rol kan opnemen van inverse matrix zodat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

B. Definitie

Zo komen we tot de volgende definitie:

Als A een vierkante matrix is van orde n, dan is A^{-1} een inverse van A a.s.a. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Men zegt: A is *inverteerbaar* of *regulier* of *niet-singulier*.

Om na te gaan of

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mekaars inversen zijn, moeten we nagaan dat:

én (omdat in het algemeen de vermenigvuldiging van matrices niet commutatief is)

Klopt dit? .....

Als A een inverse heeft, dan is die énig. Maar..., bestaat altijd zo'n inverse?

C. Niet-inverteerbare matrices

We gaan we nu op zoek naar de eventuele inverse matrix van $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

De onbekende inverse matrix stellen we voor door: $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$.

Opdat deze onbekende matrix de inverse matrix zou zijn van de gegeven matrix moet gelden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \textbf{ én } \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

We zetten deze matrix-vergelijkingen om in stelstels:

Hieruit besluiten we dat:..

Zo'n matrix die geen inverse heeft, noemen we een *niet-inverteerbare* of *niet-reguliere* of *singulier* matrix.

D. Berekening van A^{-1}

Zoek nu op dezelfde manier of de matrix uit de probleemstelling:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

een inverse matrix heeft. Bestaat deze? Zo ja, welke is dat dan? .....

Bovenstaande methode is nogal omslachtig, we gaan dan ook vanaf nu overstappen naar een nieuwe methode, die werkt zoals de methode van Gauss-Jordan. Vervolgens gaan we deze methode dan ook gebruiken in een toepassing uit de praktijk.

Methode: We vullen de gegeven matrix aan met een eenheidsmatrix van dezelfde orde en vervolgens gaan we dan deze 'aangevulde' matrix rij-canoniek maken. Op de plaats van de gegeven matrix komt dan uiteindelijk de eenheidsmatrix en op de plaats van de eenheidsmatrix komt de gezochte inverse matrix. Indien de gegeven matrix niet te herleiden is tot en eenheidsmatrix, hebben we ook geen inverse.

Samengevat:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \sim \ldots \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

JUST DO IT!

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

... en is het resultaat hetzelfde als op de eerste manier? ...
De gezochte inverse matrix is dus:

Zoek, volgens de methode van Gauss-Jordan de inverse matrix van:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E. Toepassing: coderen en decoderen

Je hebt je misschien al de vraag gesteld: waarom heeft men nu de inverse van een matrix nodig?
Matrices en hun inversen vinden bv. hun toepassingen in het beveiligen van informatie. Wij gaan dat nu illustreren aan de hand van enkele kleine boodschappen.
Bij codering en decodering wordt vaak de volgende methode gebruikt:

- Aan iedere letter van het alfabet wordt op willekeurige wijze een getal gekoppeld. Bv.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
14	12	22	26	34	31	24	35	15	32	17	28	19

n	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	*spatie*
13	27	16	21	29	20	30	23	36	11	33	25	18	5

- Er wordt een niet-singuliere (weet je nog wat dit betekent?) **coderingsmatrix** C vastgelegd. Bv.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

- De tekst wordt in groepen van vier letters verdeeld. De bij de letters behorende getallen worden in een bepaalde volgorde in een 2×2-matrix geplaatst. Bv. de groep 'in c' wordt voorgesteld door de matrix

$$\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$$

- De matrix wordt (bv.) rechts vermenigvuldigd met de coderingsmatrix C. Je kan narekenen dat

$$\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 & 162 \\ 120 & 213 \end{bmatrix} (*)$$

De groep 'in c' is nu in code: 95 162 120 213

- Als we beide leden van de vorige uitdrukking $(*)$ aan de rechterkant vermenigvuldigen met de inverse matrix van de coderingsmatrix krijgen we:

$$\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 95 & 162 \\ 120 & 213 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 95 & 162 \\ 120 & 213 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 & 162 \\ 120 & 213 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 & 162 \\ 120 & 213 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

  Dus men kan de oorspronkelijke boodschap terugvinden, door de doorgeseinde code rechts te vermenigvuldigen met de inverse matrix van de .... Deze inverse matrix zullen we dan ook logischerwijze de **decoderingsmatrix** $D = C^{-1}$ noemen.

- Bereken nu zelf de decoderingsmatrix D en zet dan de volgende doorgeseinde boodschap terug om in mensentaal: 183 315 198 336 100 177 79 126

- Stel nu per twee een korte boodschap (tussen de 8 en 16 letters of spaties) op, zet die om m.b.v. een de coderingsmatrix $C = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Wissel vervolgens deze boodschap (in code-taal) tesamen met de coderingsmatrix uit met twee collega's. Ontcijfer vervolgens mekaars boodschap. Verdeel het werk!!!

- Decodeer dan met behulp van het computerprogramma derive onderstaande geheime informatie. Hierbij is de gebruikte coderingsmatrix: $C = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$.

  454 -134 365 30 166 -182 365 -44 421 -10 79 -104 438 -112 94 -194 421 -10 82 -122 343 -60 215 -106 394 -144 353 28 256 -56 182 -56 378 -122 96 -206 442 -136 341 26 375 -30 410 -92

§ 4. Vraagstukken

- Wat wordt er van jou verwacht?

  1. Dat je vraagstukken kan ’vertalen’ naar wiskundige vergelijkingen in de vorm van een stelsel.
  2. De zo zelf opgestelde stelsels kunnen oplossen volgens de methode van Gauss-Jordan.
  3. Vervolgens de wiskundige uitkomsten kunnen interpreteren als de oplossingen van het vraagstuk. M.a.w. altijd een duidelijk antwoord kunnen formuleren op het vraagstuk.

- Welke oefeningen moet je minimaal maken? de onderstaande vraagstukken.

VRAAGSTUKKEN

Los de volgende vraagstukken op zoals aangegeven in bovenstaande kader.

1. oef. 20 blz. 84
2. oef. 22 blz. 85
3. Drie vrienden bekijken hun zakgeld. De eerste zegt tot de twee anderen: ’Indien je mij elk de helft van uw zakgeld geeft dan heb ik 3 400 BEF.’ De tweede zegt tot de twee anderen: ’Indien je mij elk het derde van uw zakgeld geeft dan heb ik 3 400 BEF.’ De derde zegt tot de twee anderen: ’ Indien je mij elk het vierde van uw zakgeld geeft dan heb ik 3 400 BEF.’ Hoeveel bezat elk?