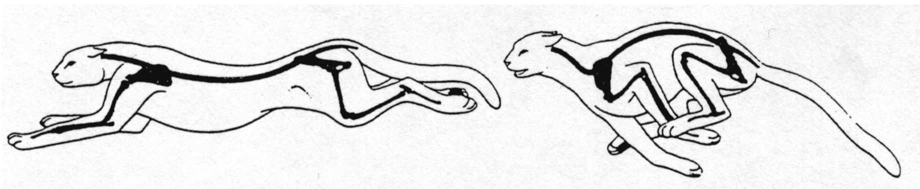
Integralen

Hoofdstuk 1

Het integraalbegrip

1.1 Sprintende jagers en lange lopers

Sommige dieren van de grasvlakten, zoals olifanten, zijn door hun grootte gevrijwaard tegen aanvallen, terwijl andere zo klein zijn dat ze zich beschermen door zich in te graven. Vele soorten zijn echter afhankelijk van hun snelheid om aan hun vijanden te ontkomen.
De snelheid van een dier hangt af van de grootte en de frequentie van zijn sprongen. Hardlopers zoals paarden hebben dan ook lange benen.
De snelste sprinter ter wereld is het jachtluipaard. Zijn poten zijn korter dan die van het paard, maar door de meer flexibele wervelkolom en gewrichten, kan hij lange sprongen maken. In een tiental seconden kan hij op een snelheid van 110 km/h komen en hij houdt die vol over een afstand van ongeveer 500 m. Het jachtluipaard wordt echter gauw moe en geeft zijn prooi dan meestal op. Een paard haalt slechts een topsnelheid van 70 km/h, maar kan deze snelheid kilometers lang aanhouden.



Een jachtluipaard wordt uit zijn middagslaapje gewekt door het geluid van paardehoeven. Op het moment dat hij wakker genoeg is om de achtervolging in te zetten, heeft het paard een voorsprong van 150 m. Het paard, dat op topsnelheid draaft, is nog lang niet aan het einde van zijn krachten.

We willen nu achtereenvolgens:

1. De gegevens over de snelheid van beide dieren in grafiek brengen.
2. Uitgaande van deze grafiek, nagaan of het jachtluipaard het paard inhaalt vooraleer het moe wordt.

We gaan nu eerst de grafiek in orde brengen:

- We nemen $t = 0$ op het ogenblik dat het jachtluipaard in gang schiet.
- Breng op de grafiek (zie volgende blz.) de gegevens van het paard aan in het blauw.
- Vooraleer we op de grafiek de snelheid van het jachtluipaard aanbrengen, houden we rekening met het volgende:
  Het jachtluipaard komt niet onmiddellijk op topsnelheid, het duurt 10 s vooraleer hij deze topsnelheid bereikt. Dit optrekken zal gelijkmatig of lineair gebeuren. Bovendien kan het jachtluipaard zijn topsnelheid maar volhouden gedurende 500 meter, wat er dan gebeurt laten we voorlopig even buiten beschouwing.

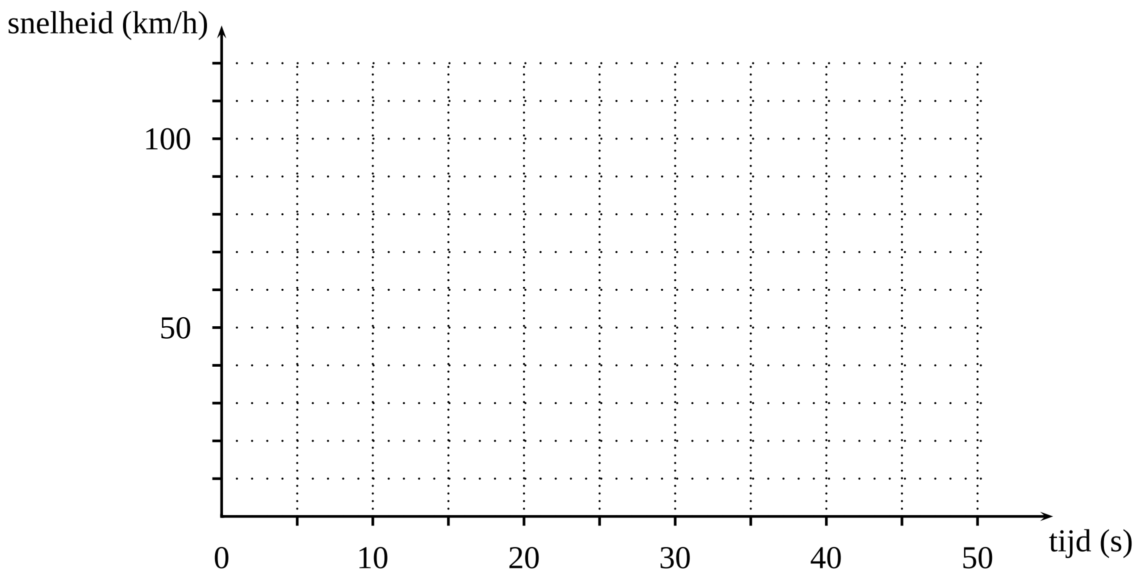
  Aangezien op de X-as niet de afstand is uitgezet, maar wel de ...., zijn we eigenlijk niet zo geïnteresseerd in:

  "hoeveel meter kan hij zijn maximale snelheid volhouden",
  maar wel in

  . . . .

  Berekeningen: (**eind**uitkomst afronden op 2 cijfers na de komma)

  Dus het jachtluipaard kan gedurende ......,...... s zijn topsnelheid volhouden.
  Vervolledig nu de grafiek voor het jachtluipaard in het rood.



Nu de grafieken in orde zijn, kunnen we deze gebruiken om op zoek te gaan naar een antwoord op de vraag:

Haalt het jachtluipaard het paard in voor het moe wordt?

Tussen de ......^{e} en de ....,....^{e} seconde loopt het jachtluipaard 500 meter met een constante snelheid van ...... km/h.

Bereken nu eens de 'oppervlakte' tussen de grafiek van het jachtluipaard en de X-as in het bovenstaande tijdsinterval [10 s, ...,.... s]. Denk er aan dat je in dezelfde eenheden werkt, d.w.z. in meters en seconden.
Berekeningen: (**eind**uitkomst afronden, geen cijfers na de komma)

Welke is de eenheid van deze 'oppervlakte'? ....
Vervolgens berekenen we de afstand die het jachtluipaard aflegt gedurende de eerste 10 seconden. Gedurende deze 10 seconden neemt de snelheid van het jachtluipaard gelijkmatig of lineair toe van ...... km/h tot ...... km/h. Het jachtluipaard legt in die 10 s dan ook evenveel afstand af als wanneer hij constant ...... km/h loopt.

Bereken nu hoeveel meter het jachtluipaard aflegt gedurende die eerste 10 s.
Berekeningen: (op twee cijfers na de komma)

Bereken ook nu weer de oppervlakte tussen de grafiek van het jachtluipaard en de X-as gedurende die eerste 10 s.
Berekeningen: (op twee cijfers na de komma)

Vergelijk:

jachtluipaard	afgelegde meters	bijhorende oppervlakte
0 - 10 s	....,....	....,....
10 - ....,.... s	....	....
totaal	....,....	....,....

Conclusie:

Indien we een grafiek hebben, waarbij de tijd op de X-as wordt voorgesteld en waarbij de snelheid op de Y-as wordt voorgesteld, kunnen we gemakkelijk:

de afstand berekenen door de bijhorende .... te berekenen van de gebieden gelegen tussen de .... en de ....-as. En dit in het bijhorende ......-interval. We stellen dus vast dat we afstanden kunnen terugvinden als .... onder de snelheidsgrafiek.

Dus vooraleer het jachtluipaard moe wordt, heeft het .... m afgelegd.

Nu is natuurlijk de vraag: hoeveel meter heeft het paard intussen afgelegd? Met intussen bedoelen we dus na .... s. Houd ook rekening met de voorsprong die het paard al had vooraleer het jachtluipaard in actie schoot.

Gebruik nu het verband tussen oppervlakte en afstand om te berekenen hoeveel meters het paard heeft afgelegd vooraleer het jachtluipaard moe is.

Berekeningen:

- voorsprong van het paard: ...... m
- afstand die het paard aflegt vanaf het moment dat het jachtluipaard in actie schiet tot het moment dat het jachtluipaard moe is:

  .... m

- totale afstand die het paard gelopen heeft sinds het passeren van het slapende jachtluipaard totdat het jachtluipaard moe is .... m

In plaats van afstanden te berekenen, kunnen we dus ook gewoon de oppervlaktes tussen de grafieken en de X-as in de betreffende tijdsintervallen berekenen. Denk er dan wel aan dat je bij de oppervlakte, horende bij het paard, de voorsprong van 150 meter niet vergeet op te tellen.
Zo zien we dat we een fysica-probleem kunnen herleiden naar een puur oppervlakteprobleem.

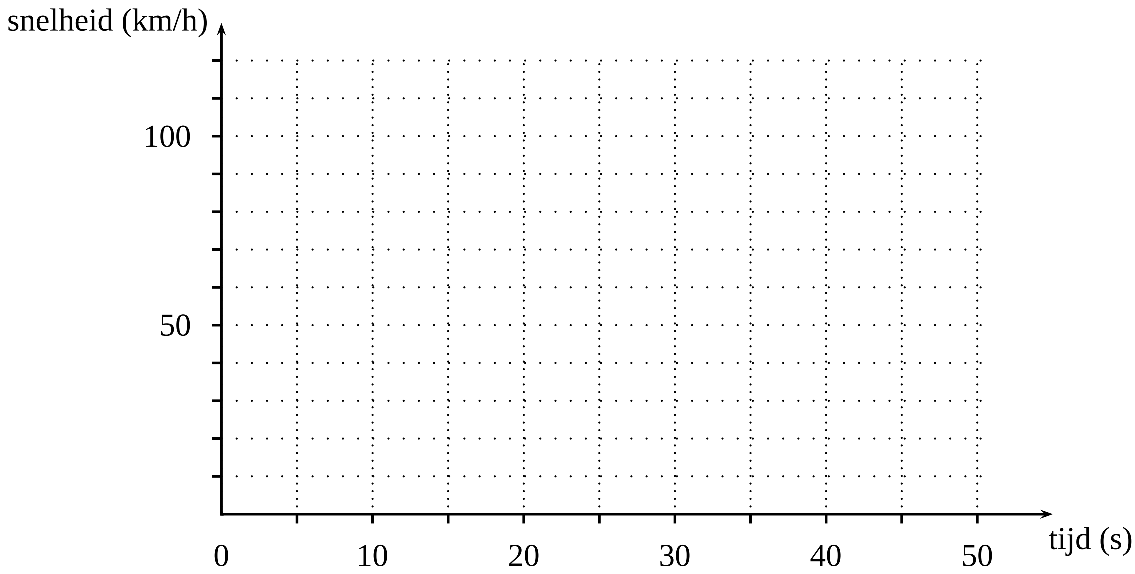
Nu kunnen we de afgelegde meters van paard en jachtluipaard vergelijken om te zien of het paard zal opgepeuzeld worden:

Het paard heeft sinds het passeren van het slapende jachtluipaard dus .... m afgelegd. Het jachtluipaard zet de achtervolging in en loopt .... m. Dit is dus wel/niet genoeg om het paard in te halen. Op het moment dat het jachtluipaard moe wordt, is zijn afstand tot het paard ongeveer .... m.

Na 10 s heeft het jachtluipaard zijn maximale snelheid dus bereikt, vervolgens heeft het gedurende ...... s deze maximale snelheid aangehouden. Waarschijnlijk zal het jachtluipaard na 26,36 s niet plots stilstaan.

Stel nu dat zijn vertraging door vermoeidheid even groot is als zijn versnelling bij het ’optrekken’. Haalt het jachtluipaard het paard dan in?

Herneem (op de volgende blz.) de grafiek en vul nu aan met de vertraging van het jachtluipaard.



De grafieken van beide dieren snijden mekaar tweemaal. Wat is de betekenis van deze snijpunten?

- Het eerste snijpunt merken we op rond 6 seconden na het in actie schieten van het jachtluipaard. Verwoord nu wat dit snijpunt in 'mensentaal' betekent.

  ....

- Het tweede snijpunt merken we op rond 30 seconden na het in actie schieten van het jachtluipaard. Geef weer de betekenis aan van dit snijpunt.

  ....

Het is vooral dit laatste snijpunt dat ons erg interesseert. Want vanaf dit moment loopt het .... trager dan het .... Als het .... op dit moment nog niet is ingehaald, zal het dan nog ten prooi kunnen vallen? ....

Stel dat het paard wel is ingehaald, dan zal het opgegeten worden en zal het dus niet meer verder lopen!

We gaan de oppervlakten dus vergelijken tot aan ....
Berekeningen:

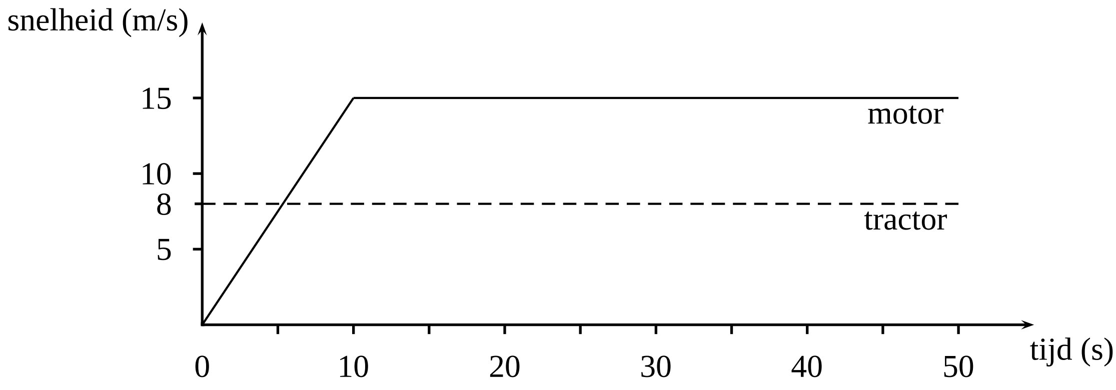
Conclusie: Gedurende zijn topsnelheid is het jachtluipaard er wel/niet in geslaagd het paard in te halen. De vertraging van het jachtluipaard is van die grootte dat het paard wel/niet ingehaald wordt tijdens de vertraging, dus wel nog voor de tijd dat beide dieren dezelfde snelheid hebben.

Onze kennis uit het vijfde jaar, tesamen met het jacht-avontuur geeft ons het volgende overzicht:

overzicht	vijfde jaar	jachtluipaard
gegeven	afstand i.f.v. tijd	snelheid i.f.v. tijd
methode	afleiden	oppervlakte berekenen
resultaat	snelheid	afstand

1.2 Een tractor en een motor

Op het moment dat een motorrijder vertrekt, rijdt er juist een tractor voorbij. In onderstaande figuur zijn de snelheidsgrafieken van de tractor en de motor samengebracht.



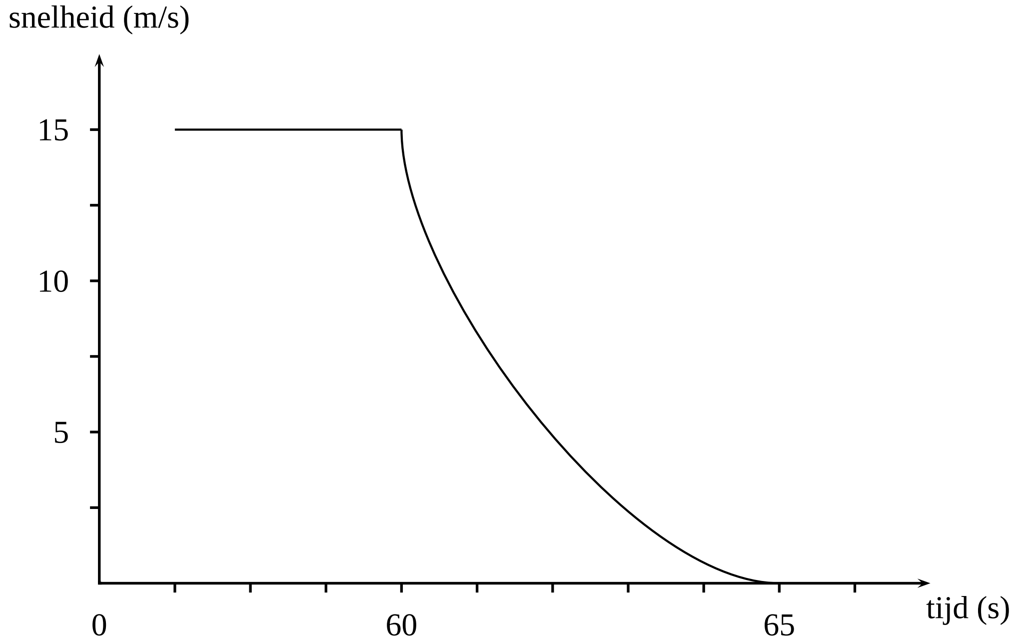
Gevraagd:
Na hoeveel seconden (op hondersten nauwkeurig) haalt de motor de tractor weer in?
Berekeningen: (gebruik je kennis i.v.m. de oppervlakte)

Wegens een onvoorzichte voetganger moet onze motorrijder na 60 seconden plotseling op de rem duwen. Dit geeft de snelheidsgrafiek op de volgende bladzijde. Los m.b.v. deze grafiek de volgende vragen op:

1. Hoe lang duurt het voor de motorrijder stilstaat? ......

2. Maak een (ruwe) schatting van de *remweg* (dit is de afstand die de motor nog aflegt alvorens stil te staan).
   Schatting:

3. Waarom kunnen we deze remweg niet exact berekenen?
   ....



4. We gaan (illustratie zie volgende blz.) nu de afzonderlijke afstanden bekijken die tijdens elke seconde van het remmen worden afgelegd. Ook hier hebben we weer per seconde een oppervlakte waarvoor we geen formule hebben. Om dit probleem op te lossen gaan we rechthoekjes bouwen die weliswaar te klein zijn, maar die als een eerste benadering voor de remweg kunnen beschouwd worden. De hoogte van elk rechthoekje wordt bepaald door de ....snelheid in het betreffende tijdsinterval.

   Berekeningen:
   remafstand afgelegd tijdens de eerste seconde:

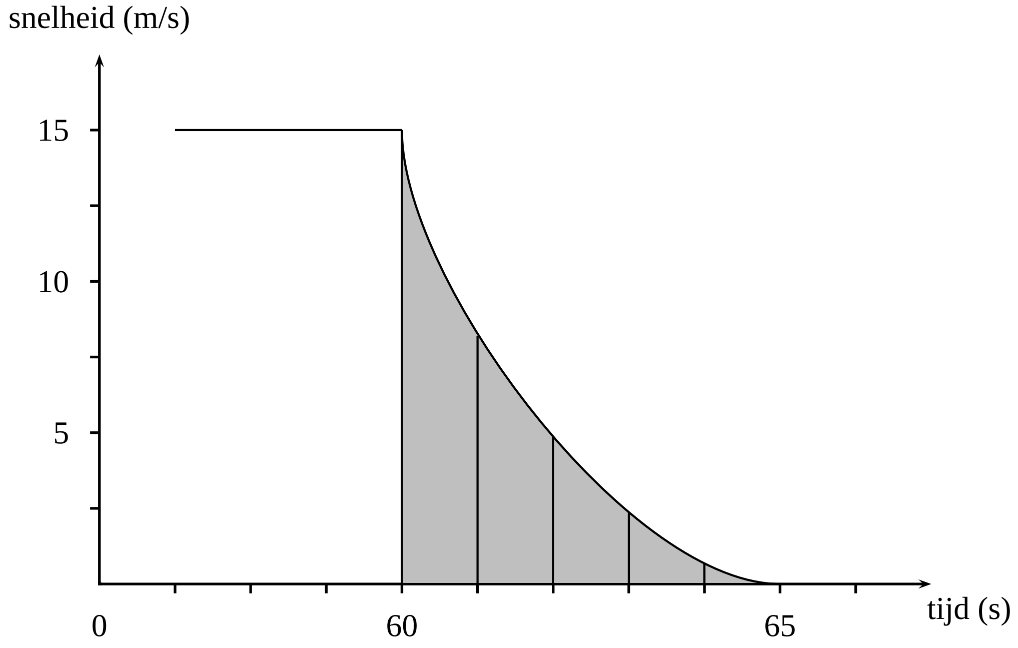
   remafstand afgelegd tijdens de tweede seconde:

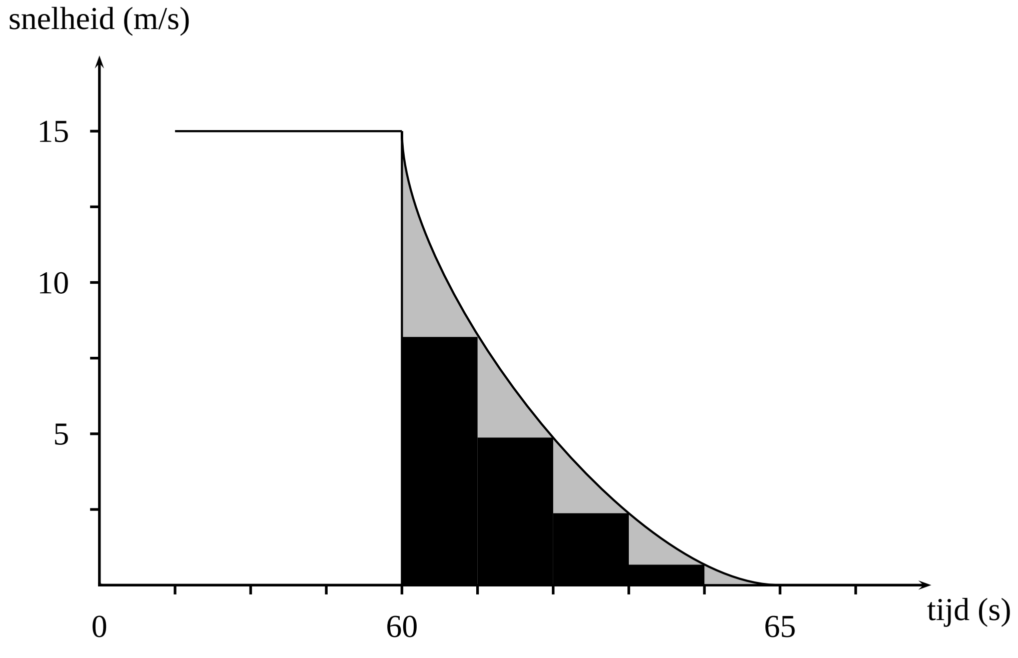
   remafstand afgelegd tijdens de derde seconde:

   remafstand afgelegd tijdens de vierde seconde:

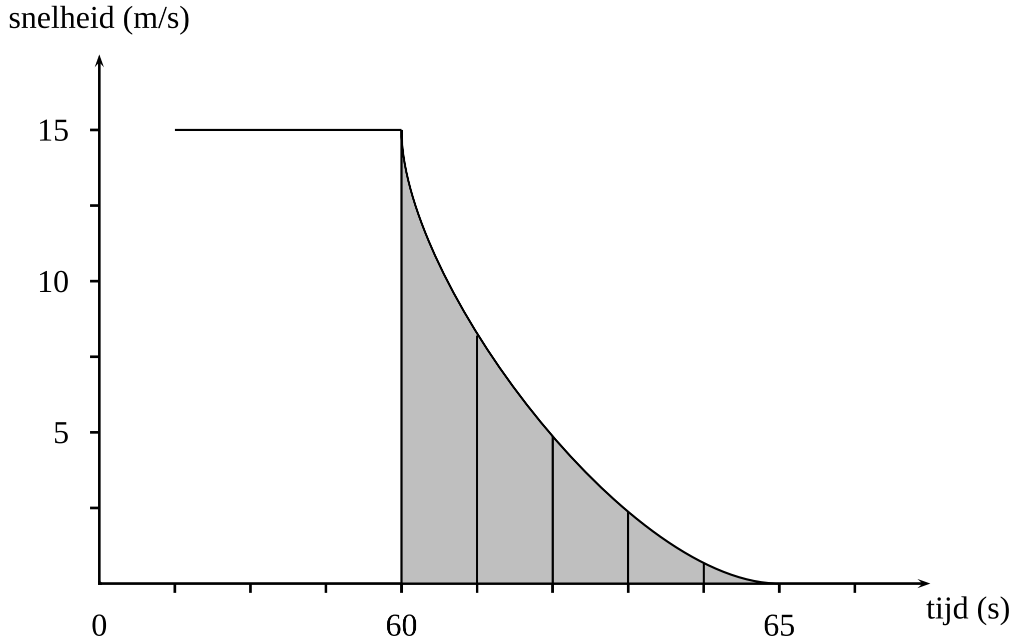
   remafstand afgelegd tijdens de vijfde seconde:

   totaal:



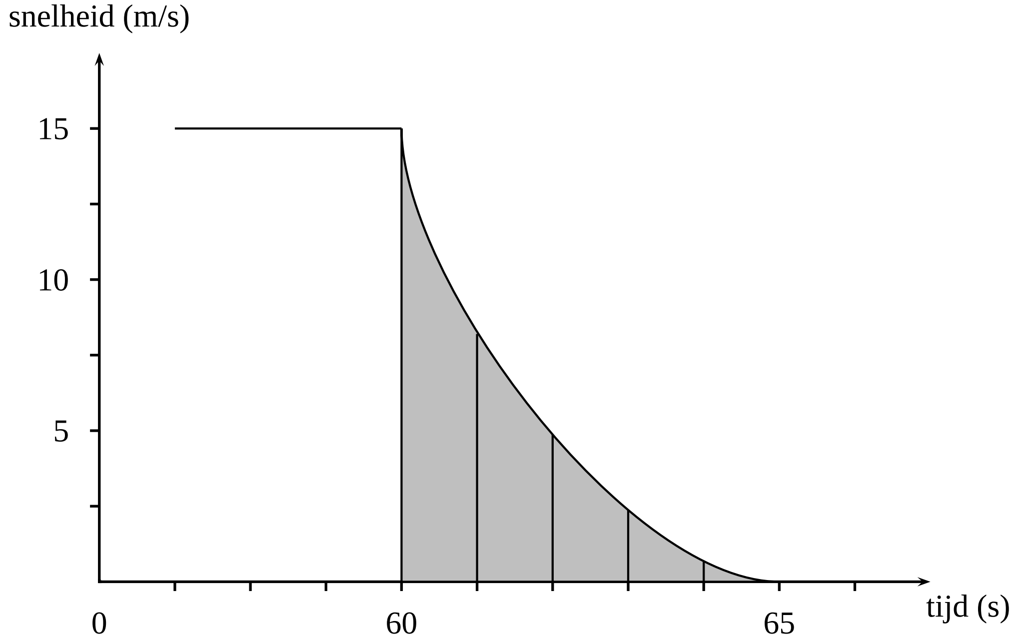


5. We merken op dat we bij deze methode niet helemaal correct zijn, de oppervlakten van de rechthoekjes bepalen niet de exacte oppervlakten. We kunnen de gemaakte fouten verkleinen door meer rechthoekjes te bouwen op kleinere tijdsintervallen. Laat ons dit eens doen voor tijdsintervallen van een halve seconde:



Berekeningen:

6. Teken (berekeningen hoeven niet) dit procédé voor tijdsintervallen van een kwartseconde.



7. Om helemaal exact te zijn, zouden we .... (hoeveel?) rechthoekjes moeten tekenen, waarvan de breedte dan ook heel .... wordt. Als we *n* het aantal rechthoekjes noemen, dan zouden we de oppervlakte kunnen schrijven als de volgende limiet:

$$\lim_{n \to \ldots} \text{(som van oppervlakten rechthoekjes)}$$

Je hebt waarschijnlijk ondervonden dat het berekenen van de oppervlakten van de rechthoekjes nog niet helemaal exact verloopt, omdat we de hoogte van de rechthoekjes maar bij benadering kunnen aflezen.
Dit probleem wordt later opgelost als we gaan werken met functievoorschriften.

Het verschil met het jachtluipaard en het paard, is dat we bij het berekenen van de remafstand van de motor niet meer voldoende hebben aan onze gekende oppervlakteformules. Om die remafstand toch te kunnen berekenen, hebben we blijkbaar het begrip **limiet** en de **oppervlaktes** van **rechthoeken** nodig.

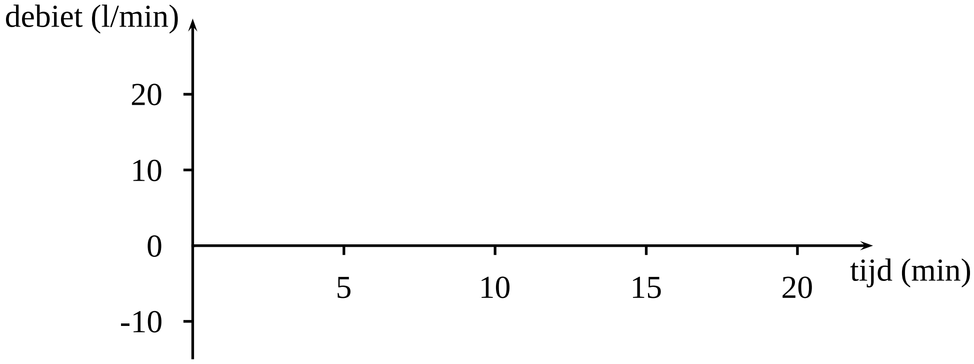
Samengevat:

Indien we **geen formules** hebben om een **moeilijke oppervlakte** te berekenen, kunnen we gebruik maken van **gemakkelijke sommen** van oppervlaktes van rechthoeken. Indien we het aantal rechthoekjes **onbeperkt** laten toenemen, komen we in de **limiet** aan de **exacte** oppervlakte.

1.3 Het badwater

's Zaterdags neemt de heer O.M. Zeep zijn wekelijks bad. Met een ruk draait hij de badkraan open. Het water stroomt in het bad met een debiet van 20 liter per minuut. Na 5 minuten is het bad bijna vol genoeg; zachtjes (gedurende een hele minuut) draait de heer Zeep de kraan dicht. Hij wast zich 10 minuten lang en dan trekt hij de stop er uit. Het water stroomt weg met een debiet van 10 liter per minuut.
Gevraagd:

1. Teken de grafiek die het debiet (l/min) uitdrukt in functie van de tijd (min).



2. Bij deze grafiek (het debiet als functie van de tijd) hoort het volgende voorschrift:

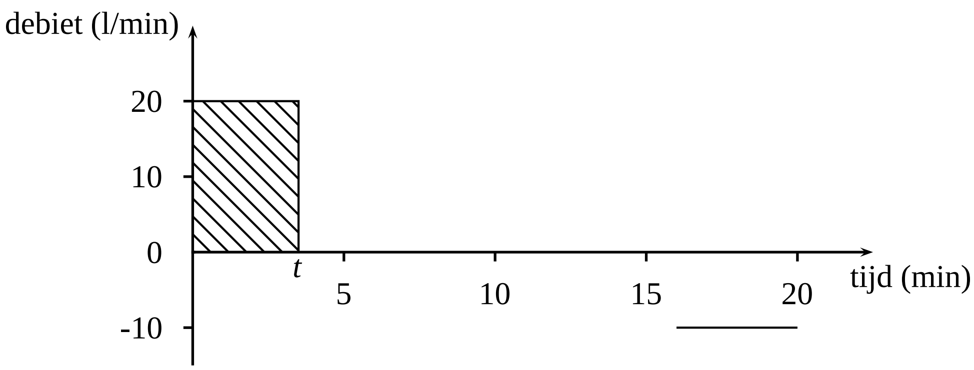
$$D(t) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & (\text{als } 0 \leq t \leq 5) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & (\text{als } 5 \leq t \leq 6) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & (\text{als } 6 \leq t \leq 16) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & (\text{als } 16 \leq t) \end{cases}$$

   (t in minuten, D in liter/minuut)
   Redeneringen:

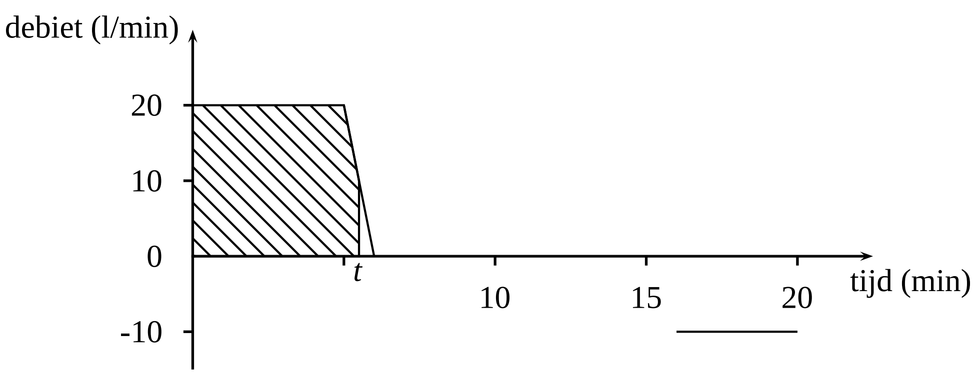
3. Schrijf in bijgevoegde tabel de hoeveelheid water die zich in het bad bevindt op de aangegeven tijdstippen. Uit de vorige voorbeelden hebben we geleerd dat je uit een snelheidsgrafiek de afstand kan bepalen door de oppervlakte te berekenen. We werken nu met een debiet, dit is de hoeveelheid water die per minuut stroomt. Dus eigenlijk is dit ook een snelheid. De oppervlakten die je gaat berekenen hebben niet de dimensie van cm^2, maar wel van ......

tijd	hoeveelheid water
1 min	.....
5 min	.....
6 min	.....
15 min	.....
20 min	.....

4. Stel nu het voorschrift op van de hoeveelheid water als functie van de tijd. Gebruik hier de volgende figuren voor:

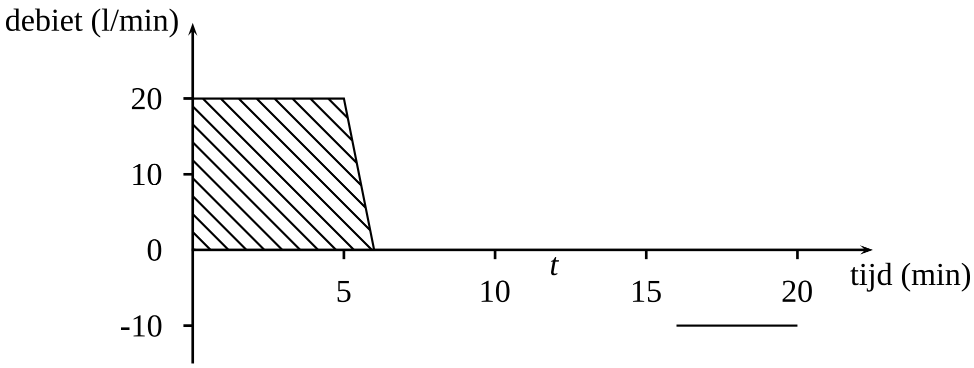


volume water = oppervlakte ....
Dus V(t)= .... (als $0 \leq t \leq 5$)



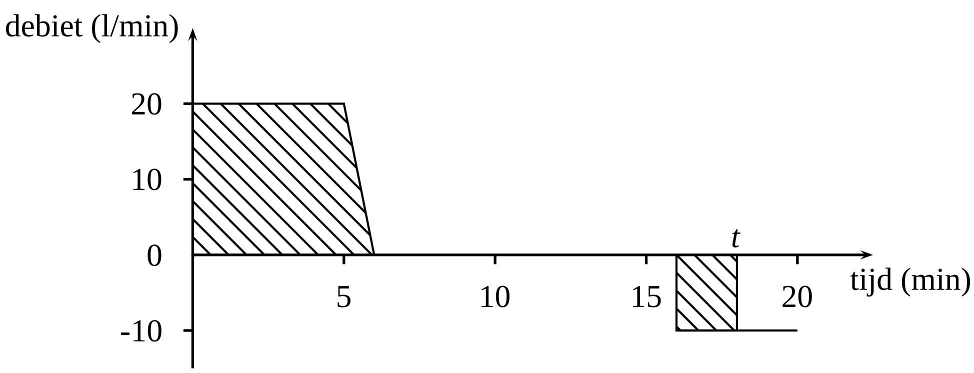
volume water = oppervlakte .... $+$ oppervlakte ....
Berekeningen:

Dus V(t)= .... (als $5 \leq t \leq 6$)



volume water = ...
Berekeningen:

Dus V(t)= .... (als $6 \leq t \leq 16$)



volume water = oppervlakte .... − oppervlakte ....

Berekeningen:

Dus V(t)= .... (als $16 \leq t$)

Samengevat:

$$V(t) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(als } 0 \leq t \leq 5) & \text{(rechthoek)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(als } 5 \leq t \leq 6) & \text{(rechthoek} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(als } 6 \leq t \leq 16) & (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(als } 16 \leq t) & (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{cases}$$

(t in minuten, V in liter/minuut)

5. Vergelijk dit voorschrift voor het volume met het voorschrift voor het debiet. Denk eens terug aan de leerstof van het vijfde jaar, welk verband zie je tussen deze twee voorschriften? ....
   Reken dit na:

6. Wanneer is het bad weer helemaal leeg?
   Berekeningen:

7. Wat er nieuw was in dit laatste probleem, was het feit dat je hier de ene oppervlakte (het water dat in het bad loopt) positief telt en de andere oppervlakte (het water dat uit het bad wegloopt) negatief in rekening brengt. Waarschijnlijk is dit de eerste keer dat je geconfronteerd word met een **oppervlakte** die **negatief** wordt geteld!!!

1.4 Eindelijk.... het begrip bepaalde integraal

Na deze drie problemen opgelost te hebben, wordt het tijd om een en ander op een rijtje te zetten. De behandelde problemen komen eigenlijk drie keer op hetzelfde neer: nl. op het berekenen van .... tussen .... en .... en dit telkens in het betreffende .... In het laatste probleem moesten we bovendien nog rekening houden met het feit of we boven of onder de X-as werkten.

1. Voor het eerste probleem met het jachtluipaard en het paard konden we ons behelpen met onze gekende oppervlakteformules uit de lagere school.

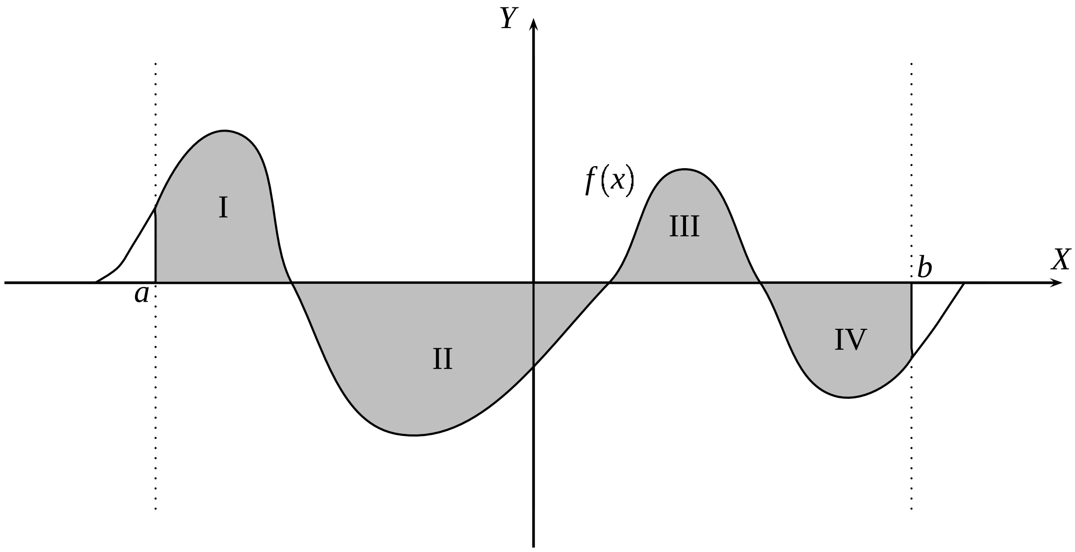
2. Voor het tweede probleem met de motor en de tractor lieten de oppervlakteformules ons in de steek. We benaderden daar een moeilijke oppervlakte door een gemakkelijke som. Als we deze som namen voor oneindig veel rechthoekjes, kregen we de exacte oppervlakte. We vonden daar:

   $$\lim_{n\to\infty} (\text{som van oppervlakten rechthoekjes})$$

   waarbij n het aantal rechthoekjes voorstelde. De breedte van zo'n rechthoekje werd dan natuurlijk ....

3. Voor het laatste probleem met het badwater hadden we nood aan een oppervlakte negatief te tellen. Dus we hebben een begrip nodig dat iets zegt over de oppervlakte, maar dat er ook nog bij zegt of we deze oppervlakte positief of negatief moeten tellen. Om dit korter uit te drukken zullen we in het vervolg spreken van een georiënteerde oppervlakte, waarmee we dus de oppervlakte bedoelen, die voorzien is van een teken.

Deze samenvatting leidt ons nu tot het wiskundig begrip **bepaalde integraal**.



De bepaalde integraal van de functie f tussen de grenzen a en b, genoteerd

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

is gelijk aan de som van de georiënteerde oppervlakten van de gebieden tussen

- de grafiek van f
- de X-as
- de rechten $x = a$ en $x = b$ (evenwijdig met de Y-as)

Dus op bovenstaande tekening betekent dit:

$\int_a^b f(x)\,dx =$ ....

Kortweg gezegd is de integraal dus een oppervlakte voorzien van een teken. Een oppervlakte is op zich altijd een positieve grootheid, terwijl een integraal ook negatief kan zijn.

Misschien vind je de notatie een beetje vreemd, daarom de volgende toelichting:

In het voorbeeld van de motor en de tractor moesten we om de oppervlakte te kunnen berekenen de moeilijke oppervlakte benaderen door een gemakkelijke som van oppervlakten van rechthoeken. Indien we het aantal rechthoeken oneindig lieten toenemen kwamen we zo tot de exacte oppervlakte. Eigenlijk moesten we dus een oneindige som maken van oppervlakten van rechthoeken.

Het integraalteken op zich: $\int$ komt eigenlijk van een langgerekte S van Som, het stelt een oneindige Som voor.

Een oneindige som van wat? Van oppervlakten van rechthoekjes die oneindig smal worden. Het oppervlak van zo een rechthoekje wordt gegeven door:

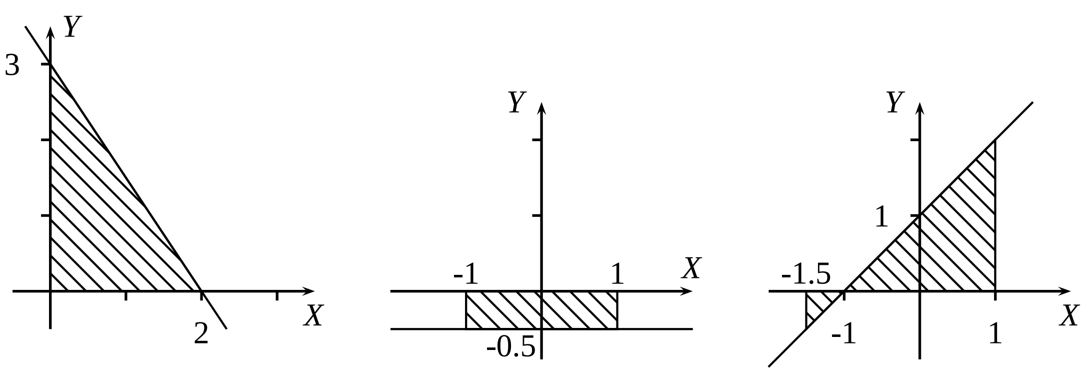
$$\text{opp(rechthoekje)} = f(x)dx,$$

waarbij $f(x)$ de hoogte van het rechthoekje weergeeft en dx de notatie is voor een oneindig kleine breedte volgens de X-as.

Dus $\int_a^b f(x)\,dx$ stelt een oneindige som van oppervlakten van rechthoekjes voor, waarbij de oppervlakte positief wordt geteld indien we boven de X-as werken en negatief wordt geteld indien we onder de X-as werken.

1.5 Tijd om dit begrip in te oefenen!

1. Noteer de gearceerde oppervlakte met de integraalnotatie en bereken vervolgens die oppervlakte.



2. Maak een schets en bereken:

   (a) $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$

   (b) $\int_{4}^{7} (5-x)\,dx$

   (c) $\int_{2}^{5} 2\,dx$

   (d) $\int_{2}^{6} (\frac{1}{2}x+1)\,dx$

   (e) $\int_{0}^{6} \frac{1}{2}x\,dx$

   (f) $\int_{1}^{4} (2x-1)\,dx$

   (g) $\int_{-2}^{3} 3\,dx$

   (h) $\int_{-4}^{-2} (-x)\,dx$

   (i) $\int_{-2}^{4} (\frac{-1}{2}x+2)\,dx$

3. Een functie van de tweede graad stelt een .... voor.
   In het vierde jaar hebben we deze functies bestudeerd. In het algemeen is zo'n functie van de vorm: $y = ax^2 + bx + c$.

   - Afhankelijk van het teken van .... hadden we een 'lachende' of een 'zure' ....
   - Als ..... > 0, dan hebben we een ....
     Als ..... < 0, dan hebben we een ....
   - De top bevindt zich in het punt met coördinaten (........, ...).
   - De snijpunten met de X-as vind je door ...... gelijk te stellen aan 0.
     De snijpunten met de Y-as vind je door .... gelijk te stellen aan 0.

$$\int_0^4 (\frac{1}{4}x^2 + 1)\,dx$$

   (a) Arceer de oppervlakte die bij deze integraal hoort.

   (b) Net zoals in het voorbeeld van de remweg voor de motor, gaan we nu de oppervlakte berekenen m.b.v. een benadering van oppervlakten van ....
   We gaan nu echter de hoogtes van de rechthoeken niet meten, maar exact berekenen. Dit gaat nu omdat we het functievoorschrift gegeven hebben. Doe dit achtereenvolgens voor 2 rechthoeken, 4 rechthoeken en 8 rechthoeken.
   Samenvatting:

   - Benadering voor 2 rechthoeken: .....
   - Benadering voor 4 rechthoeken: .....
   - Benadering voor 8 rechthoeken: .....
   - Benadering voor 4 096 rechthoeken: 9,33138...
   - Benadering voor 8 192 rechthoeken: 9,33235...

   Dus als men het aantal rechthoekjes laat toenemen, zal de benadering steeds verbeteren, maar altijd onder de werkelijke oppervlakte blijven. Uit bovenstaand overzicht kan men al zeker besluiten dat de eerste 3 cijfers juist zijn. Waarschijnlijk zal de werkelijke oppervlakte .... zijn.

Hoofdstuk 2

Oppervlaktefunctie

2.1 Met een oppervlakte kunnen we veel doen

In het vraagstuk van het jachtluipaard en het paard hebben we, uitgaande van de snelheidsgrafiek, afstanden kunnen berekenen. Als we bijvoorbeeld de gelopen afstand wilden kennen van het jachtluipaard na 30 seconden, berekenden we de oppervlakte tussen de ....- as, de .... en in het tijdsinterval $[.....,.....]$. Nu geschreven met integralen geeft dit:
$s(30) = \int_{\dots}^{\dots} ....d\dots$ = geörienteerde oppervlakte tussen ....

In feite hebben we daar gewerkt met de zogenaamde oppervlaktefunctie van de gegeven snelheidsfunctie: We laten elke willekeurig tijdstip t overeenkomen met de afgelegde afstand na t seconden. Deze afgelegde afstand kunnen we zien als een geöriënteerde oppervlakte.

$$t \mapsto s(t) = \int_{\dots}^{\dots} ....d\dots$$

Wat doet zo'n oppervlaktefunctie dus?
Ze laat met elk tijdstip t de overeenstemmende oppervlakte overeenkomen (oppervlakte gemeten tussen tijdstip .... en tijdstip ...., de ...-as en de ....-grafiek). Deze oppervlakte geeft in dit geval de .... na t seconden.
Merk op: bij de laatste notatie zijn we verplicht een andere integratieveranderlijke u te gebruiken. Je kunt immers niet zeggen: 't varieert tussen de grenzen 0 en t'

Bij het badwater leverde de oppervlakte onder de grafiek ons .... op. Met de integraalnotatie geeft dit:

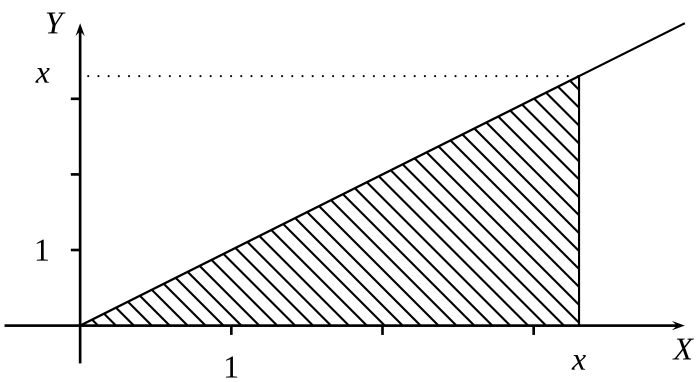
$$t \mapsto ...(t) = \int_{...}^{...} ....d...$$

We hebben dus weer een functie die een tijdstip laat overeenkomen met een oppervlakte (voorzien is van een teken!!!!). Wat geeft deze oppervlakte weer?
....

2.2 Definitie en eigenschap

In het algemeen is de *oppervlaktefunctie* O_f van een functie f, de functie die met elke waarde van x de overeenstemmende georiënteerde oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de X-as met als grenzen 0 en x weergeeft. Symbolisch: $O_f(x) = \int_0^x f(u)\,du$

Afhankelijk van het vraagstuk heeft deze oppervlakte een andere betekenis (afgelegde weg, volume, ...)
Als de gegeven (snelheids-, debiet-, ...)grafiek een rechte is (of uit rechte stukken bestaat), is het niet zo moeilijk om de oppervlaktefunctie $O_f(x)$ te vinden



$O_f(x) = \int_{...}^{...} .....\,du = ...$

$D(O_f(x) = ...) = ...$
Wat valt er op???..

Waar hebben we nog zo'n verband gezien? ....

Inderdaad daar hadden we $D(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, dus weer
$D(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hieruit blijkt dus nogmaals dat:

$$\boxed{DO_f(x) = \ldots.}$$

Dit betekent dat voor de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, waarmee we vorig hoofdstuk hebben afgesloten, geldt: $O_f(x) = \ldots\ldots.$

Indien we nu $O_f(4)$ berekenen, vinden we .... en stemt dit overeen met de benaderingen die we toen gevonden hebben? ....

Dus de omslachtige 'teken- en benadermethode' kan nu vervangen worden door een kortere methode. Het komt er dus gewoon op neer de oppervlaktefunctie te vinden. Oppervlaktefuncties zoeken is dus is eigenlijk het omgekeerde van ....

2.3 Andere eigenschappen

Bereken een stamfunctie of ook primitieve functie F genoemd van de volgende veelterm-functies f:
Reeks 1:

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = 2$
3. $f(x) = -3$
4. $f(x) = 2x$
5. $f(x) = 4x$
6. $f(x) = x$
7. $f(x) = 3x$
8. $f(x) = 5x$
9. $f(x) = 3x^2$
10. $f(x) = 6x^2$
11. $f(x) = 9x^2$
12. $f(x) = x^2$
13. $f(x) = 4x^2$
14. $f(x) = 5x^2$
15. $f(x) = 4x^3$
16. $f(x) = 8x^3$
17. $f(x) = -4x^3$
18. $f(x) = x^3$

Reeks 2:

1. $f(x) = 2x^0$
2. $f(x) = 4x^0$
3. $f(x) = -x^0$
4. $f(x) = 2x$

5. $f(x) = 3x^2$
6. $f(x) = 4x^3$
7. $f(x) = x^n$

We vinden dus dat de primitieve functie van $f(x) = x^n$ gelijk is aan ....

Reeks 3:

1. $f(x) = 5x^2$
2. $f(x) = 6x^3$
3. $f(x) = 4x^4$
4. $f(x) = 5x^{-2}$
5. $f(x) = 6x^{-3}$
6. $f(x) = 4x^{-4}$
7. $f(x) = x^{-10}$